Problèmes de monotonie dans les procédures de rangement procédant par choix itérés

Boris Golden

Sujet d'Initiation à la Recherche, avec Patrice Perny

Lundi 11 février 2008

Corpus des articles étudiés

- **Olivier Hudry (2002)** :
  "Votes et Paradoxes"
- **Xavier Juret (2003)** :
  "Conditions suffisantes de monotonie des rangements itératifs"
- **Denis Bouyssou (2002)** :
  "Monotonicity of ranking by choosing"
- Objectifs : démarche de recherche, synthèse critique et perspectives

Motivations de l'étude de **monotonie des choix itérés**

- En théorie du choix social, prise de décision collective :
  - choix (sélection des meilleures alternatives)
  - rangement (classement des alternatives)
- Moyen d'obtenir un rangement : itérer le choix des meilleurs
- Electre III, scrutin à plusieurs tours (université, téléréalité)
- Utilisation croissante du *vote électronique*
- Monotonie : popularité augmente $\Rightarrow$ impact favorable
- Intuitif, et pourtant complexe dans le cas des choix itérés

  $\longrightarrow$ problématique intéressante

Introduction au choix social

Théorie du choix social

Définir de façon pertinente la préférence collective d'un groupe à partir des préférences de chacun de ses individus.

- En informatique : agrégation de préférences & multicritère
- N ensemble des n **votants** (ou individus)
- X ensemble de **candidats** (ou alternatives), tel que $|X| \geq 3$
- $\pi = (\geq_1, ..., \geq_n)$ **profil** de préférences individuelles à agréger
- préférence $\geq_i$: **préordre total** (décomposable en $>_i$ et $\sim_i$)
- $\pi^{-1} = (\geq_1^{-1}, ..., \geq_n^{-1})$ (inversion des préférences)

Procédures de choix et de rangement

Deux problématiques pour l'agrégation :

- **choix** (ou vote, i.e. sélection des meilleurs candidats)
- **rangement** (i.e. classement des candidats)

Soit π un profil et $\emptyset \neq A \subseteq X$. On définit une :

- **procédure de choix** C : sélectionne $\emptyset \neq C(A, \pi) \subseteq A$, meilleurs candidats dans A pour le profil π
- **procédure de rangement** R : préordre total $R(A, \pi)$ sur A.
- **procédure de score** s : score réel $s(a, \pi)$ pour $a \in A$, qui quantifie sa popularité $\longrightarrow$ rangement par score décroissant

Procédures "raisonnables" (monotones, discriminantes, etc) ?

La monotonie, une propriété naturelle et essentielle

Monotonie +

Si un candidat accroît sa popularité auprès des votants, il ne peut en être désavantagé dans le résultat du processus de décision (ses performances s'améliorent, au sens large).

Monotonie −

Si un candidat diminue sa popularité auprès des votants, il ne peut en être avantagé dans le résultat du processus de décision (ses performances se détériorent, au sens large).

PROPOSITION

Ces deux formulations de la monotonie sont équivalentes.
$\longrightarrow$ on peut donc parler de **monotonie**

Une définition formelle de la monotonie

Accroître sa popularité ?

Amélioration élémentaire d'un profil

π' améliore élémentairement π pour a, et l'on note $\pi' >_a \pi$, ssi :

$$\exists i \in N,\ \exists b \in X \text{ tq } \begin{cases} \forall j \neq i,\ \geq'_j = \geq_j \\ \forall \{y,z\} \neq \{a,b\} \in A^2, y \geq'_i z \Leftrightarrow y \geq_i z \\ (b >_i a \text{ et } a \geq'_i b) \text{ ou } (b \sim_i a \text{ et } a >'_i b) \end{cases}$$

Améliorer ses performances ?

Monotonie d'une procédure de rangement R

Si $\pi' >_a \pi$, en notant $\geq = R(A, \pi)$ et $\geq' = R(A, \pi')$

$$\forall\ b \in A,\ \begin{cases} a \sim b \Rightarrow a \geq' b \\ a > b \Rightarrow a >' b \end{cases}$$

Résultats négatifs en choix social

- Influence décisive du mode de scrutin
- Paradoxes des élections :
  - non monotonie
  - abstention
  - découpage en circonscriptions
  - sièges de l'Alabama, etc
- Théorèmes d'impossibilité :
  - Arrow (1951)
  - Gibbard-Weymark (1987)
  - Gibbard-Satterthwaite (1973)
  - ... mais limites de ces résultats

Pourquoi itérer un choix ?

- Idée naturelle pour passer d'un choix à un rangement
- Modélise bien les processus de décision par étapes
- Plus facile de sélectionner les meilleurs que de classer
- Raffiner un choix peu discriminant
- Et pourquoi pas utiliser directement un score ?
  - sensible au retrait des meilleurs candidats (désistement)
  - exploite souvent partiellement les préférences (uninominal)

C est une procédure de choix, π un profil et $\emptyset \neq A \subseteq X$.

Deux mécanismes pour itérer un choix

Procédure RIT :

- choix récursif des meilleurs candidats
- arrêt : plus de candidats
- les meilleurs choisis en premier

$RIT_C(A,\pi)$

1 : $k \leftarrow 1$ et $A_1 \leftarrow A$
2 : répéter
3 : $\quad C_k \leftarrow C(A_k, \pi_{|A_k})$
4 : $\quad A_{k+1} \leftarrow A_k \backslash C_k$
5 : $\quad k \leftarrow k+1$
6 : jusqu'à $A_{k+1} = \emptyset$

E1 : choisir le plus apprécié

Procédure RAP :

- élimination récursive des pires candidats
- arrêt : ensemble stable
- les meilleurs rejetés en dernier

$RAP_C(A,\pi)$

1 : $k \leftarrow 1$ et $A_1 \leftarrow A$
2 : répéter
3 : $\quad A_{k+1} \leftarrow C(A_k, \pi_{|A_k})$
4 : $\quad C_k \leftarrow A_k \backslash A_{k+1}$
5 : $\quad k \leftarrow k+1$
6 : jusqu'à $C_k = \emptyset$

E2 : choisir le plus détesté

Similarités entre procédures RIT et RAP

Procédure de choix duale C^*

$$C^*(A,\pi) = \begin{cases} A \setminus C(A,\pi^{-1}) & \text{si } A \setminus C(A,\pi^{-1}) \neq \emptyset \\ A & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple : E1 et E2 sont des procédures duales (donc “très similaires”)

PROPOSITIONS : lien entre procédures duales

- $RAP_C(A,\pi) = (RIT_{C^*}(A,\pi^{-1}))^{-1}$
- RAP_C monotone $\Leftrightarrow$ RIT_{C^*} monotone

Procédure de choix supermonotone

C est **supermonotone** ssi RIT_C monotone

Premier résultat négatif : le scrutin uninominal

Le scrutin uninominal majoritaire n'est pas supermonotone :

$$\left\{\begin{array}{ll} 8\times & x > y > z \\ 5\times & z > x > y \\ 4\times & y > z > x \end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} 6\times & x > y > z \\ 2\times & y > x > z \\ 5\times & z > x > y \\ 4\times & y > z > x \end{array}\right.$$

si deux votants changent d'avis et préfèrent y à x

$\rightarrow$ Surprise : la perte de popularité de x conduit à son élection !

Conséquence : le scrutin uninominal majoritaire à deux tours (pourtant utilisé pour les élections en France) n'est pas monotone

Second résultat négatif : la méthode de Borda

- Rangement monotone trivial : trier par scores décroissants
- Et si l'on itère le choix des candidats de score maximal ?

$$\begin{cases} 4\times & z > x > y \\ 3\times & x > y > z \\ 1\times & y > z > x \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 4\times & z > x > y \\ 2\times & x > y > z \\ 1\times & y > x > z \\ 1\times & y > z > x \end{cases}$$

- Classement après itération : $x > y \sim z$
- Si l'un des votants décide d'augmenter y d'une place :
  - nouveau classement après itération : $x \sim z > y$
  - y se retrouve seul dernier : rangement non monotone !

→ Pourtant, le score de Borda est monotone : que se passe-t-il ?

Interprétation des problèmes de supermonotonie

- Appauvrissement progressif des informations que l'on exploite
- Pourquoi la monotonie de la procédure de choix ne suffit pas :
  - si un candidat x est amélioré élémentairement
  - toutes les configurations envisageables le faisant intervenir s'amélioreront par rapport au profil initial
  - *mais c'est trompeur car :*
  - l'algorithme peut, à une étape, modifier la sélection des vainqueurs par rapport au profil initial
  - et passer alors au cours des itérations suivantes par de nouvelles configurations, éventuellement défavorables à x
- Caractérisation difficile : chemin emprunté par l'itération descendante dans le treillis des candidats “imprévisible”

Pourquoi rechercher des conditions suffisantes ?

- Monotonie de la procédure de choix : pas suffisant
- Mais nécessaire (première étape du rangement)
- Difficile de trouver d'autres conditions nécessaires
- $\longrightarrow$ recherche de conditions suffisantes (article de X. Juret)

Rationalisation et supermonotonie

Propriété de rationalisation : assure une cohérence du choix

Procédure de choix rationalisable

C est **rationalisable** si $\forall \pi$, $\exists$ R_π relation binaire sur X tq :
$\forall\ A \neq \emptyset \subseteq X,\ (x \in C(A, \pi)\ \Leftrightarrow\ \forall y \in A \backslash \{x\},\ xR_\pi y)$

PROPOSITION (Juret, 2001)

C rationalisable et monotone $\Rightarrow$ C supermonotone

- Condition suffisante, mais pas nécessaire
- Propriété trop contraignante en pratique

Décomposition en sous-propriétés

- Idée : décomposer la supermonotonie en sous-propriétés
- Rationalisation : fortement lié à d'autres conditions connues
- Décomposable en deux sous propriétés : α et γ (Sen, 1966)

Propriétés α et γ

- $\alpha : \forall \pi,\ \forall A \neq \emptyset \subseteq A' \subseteq X,\ C(A', \pi) \cap A \subseteq C(A, \pi)$
- $\gamma : \forall \pi,\ \forall A, A' \neq \emptyset \subseteq X,\ C(A, \pi) \cap C(A', \pi) \subseteq C(A \cup A', \pi)$

PROPOSITION (Juret, 2003)

Associée à la monotonie, aucune des propriétés α et γ n'est nécessaire ou suffisante pour la supermonotonie

Scores monotonones et applications

Respect itératif d'un score monotone :

- traduction numérique de la définition ordinale de la monotonie
- facilite les démonstrations, mais pas d'apport théorique

Quelles procédures supermonotones connaît-on ?

- la procédure de choix non discriminante
- Maximin
- Maximax
- Procédure de Schwartz

→ procédures peu discriminantes

Limites de cette approche

- Rationalisation : propriété trop contraignante
- Scores monotones : simple reformulation
- Procédures exhibées : peu discriminantes, pas vraiment itérées
- Possible de rechercher d'autres conditions ...
- ... mais limites de l'approche axiomatique
- Pas de condition suffisante utile en pratique
- Une seule procédure "convenable" : celle de Schwartz
- Problématique ardue, résultats obtenus peu encourageants

$\longrightarrow$ étude d'un cas particulier plus simple : les tournois

Tournois et liens avec l'agrégation de préférences

Tournoi, tournoi faible

Un **tournoi** T est une graphe orienté complet asymétrique. Si l'on relaxe la contrainte d'asymétrie, on obtient un **tournoi faible**.

But : classer les concurrents sur la base de duels (compétitions)

Procédure tournoyante

Procédure transformant un profil de préférences en tournoi faible

$$W_{maj} : \forall\ (a, b) \in A^2, aTb \Leftrightarrow (|\{i\ /\ a >_i b\}| \geq |\{i\ /\ b >_i a\}|)$$

Corollaire du théorème de McGarvey (1953)

W_{maj} surjective vers les tournois faibles de taille au plus $|X|$

Problèmes de T-supermonotonie

- T tournoi faible sur X, C une procédure de choix de tournoi
- Itération du choix pour les tournois $\rightarrow$ **T-supermonotonie**
- Score de Copeland (degré sortant) : pas T-supermonotone

$$(T) \left\{ \begin{array}{c} aTb \\ bTc, bTd \\ cTa, cTd, cTe \\ dTa, dTe \\ eTa, eTb \end{array} \right. \qquad (T') \left\{ \begin{array}{c} aTb, aTc \\ bTc, bTd \\ cTd, cTe \\ dTa, dTe \\ eTa, eTb \end{array} \right.$$

- Itération de Copeland dans (T) : $c > d \sim e > a > b$
- $cTa \rightarrow aT'c$, dans (T') : $a \sim b \sim c \sim d \sim e$
- Gagner un match initialement perdu : a ne bat plus personne !

Propriétés des procédures de choix de tournoi

- a **couvre** b ssi : $(aTb \;\&\; \neg bTa)$ et $(\forall c \in X,\; bTc \Rightarrow aTc)$
- $UC(A,T)$: candidats de A maximaux pour la couverture
- **neutralité** : $\sigma(C(A,T)) = C(A,\sigma(T))$
- **locale** : $T_{|A} = T'_{|A} \Rightarrow C(A,T) = C(A,T')$
- **Aizerman** : $C(A) \subseteq B \subseteq A \Rightarrow C(B) \subseteq C(A)$
- **SSP** : $C(A) \subseteq B \subseteq A \Rightarrow C(B) = C(A)$

Principaux résultats de Bouyssou

Théorème d'impossibilité (Bouyssou, 2003)

Aucune procédure locale, neutre, Aizerman, raffinant UC n'est T-supermonotone.

$\rightarrow$ Nécessité d'affaiblir les exigences de monotonie

Monotonie et T-supermonotonie faibles

Une procédure de rangement de tournoi est faiblement monotone ssi :
$\forall\ T' >_a T, \forall b,\ (a \geq b \Rightarrow a \geq' b)$

Condition suffisante de faible T-supermonotonie (Bouyssou, 2003)

C locale, monotone et SSP $\Rightarrow$ C faiblement T-supermonotone

Une procédure intéressante : Top Cycle est T-supermonotone.

Application à notre problématique

Théorème : transfert de la propriété de supermonotonie

C_t T-supermonotone $\Rightarrow (C_t \circ W_{maj})$ supermonotone

(La réciproque est fausse dans le cas général)

Corollaire : Top Cycle II, nouvelle procédure supermonotone

Top Cycle II *(appliquer Top Cycle au tournoi issu de la relation majoritaire)* est une procédure de choix supermonotone

Mais Top Cycle II est "dominée" par la procédure de Schwartz :

- nombre pair de votants : équivalence entre les deux
- nombre impair de votants : Top Cycle II moins discriminante

Conclusions de cette étude

- Itération du choix : complique l'étude de la monotonie
- Conditions nécessaires : trop difficile
- Conditions suffisantes : pas satisfaisantes
- Procédures supermonotones : peu discriminantes
- Tournois : trop simplifiés, monotonie faible : trop permissive...
- ... et pourtant, problème encore difficile !
- Peu d'espoir de résultats positifs dans le cas général
- Limites intrinsèques de l'itération du choix

Perspectives de recherche

- Meilleure compréhension de la supermonotonie
- Recherche de théorèmes d'impossibilité
- Autres choix de modélisation
- Pertinence des contre-exemples ? Etude plus approfondie
- Manipulabilité de telles procédures